

UOT- 539.376

**ÇOXLAYLI NAZİK DİVARLI UCLARDAN SƏRT-OYNAQLI  
BAĞLANAN ÇUBUQLARDA QEYRİ-XƏTTİ ANİ ELASTİKİ  
DEFORMASIYASINI NƏZƏRƏ ALMAQLA SÜRÜNCƏKLİYİN  
TƏDQIQI**

Y.N.BAVƏFA

*Bakı Dövlət Universiteti**yousef\_Bavafa@yahoo.com*

*Bu məqalədə bir ucdan sərt və digər ucdan oynaqla bağlanan prizmatik çubuqların fiziki qeyri-xətti ani elastiki deformasiyasını nəzərə almaqla sürüncəklik prosesində qabarma məsələsi tədqiq olunur. Fərz edilir ki, laylar müxtəlif materiallardan təşkil olunub və arasındakı kontakt sərt bağlamadan ibarətdir (belə layihələndirilmiş strukturlar kompozit və ya paket adlandırılır).*

*Məsələ sürüncəklik problemləri üçün isbat olunan qarışıq tipli variasiya prinsipinin Rely-Ritz üsulunun tədqiqi ilə həllinə gətirilir və alınmış diferensial tənlik ədədi üsullarla hesablanır.*

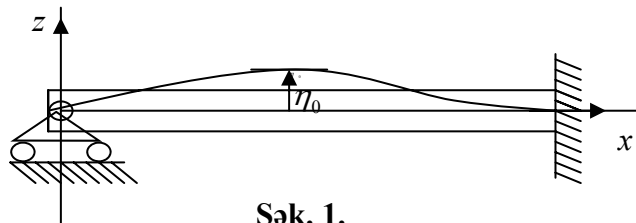
**Açar sözlər:** çoxlaylı çubuq, sürüncəklik, paket, kritik qüvvə, kritik zaman, qeyri-xəttilik, variasiya metodu.

**Məsələnin həlli**

Fərz edək ki, çubuğun uzunluğu  $l$ , qalınlığı  $2h$  və hər bir layın qalınlığı  $\delta_k$ , layların sayı  $s$  və hər layın elastiklik modulu  $E_k$  olsun. Beləliklə, yaza bilərik:

$$\sum_{k=0}^s \delta_k = 2h, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s-1 \quad \text{və} \quad -h + \sum_{j=0}^k \delta_j \leq z \leq -h + \sum_{j=0}^{k+1} \delta_j$$

Həmçinin fərz edirik ki, çubuğun oxu koordinat sisteminin  $x$  oxu boyunca yönəlsin. Koordinat sisteminin  $z$  oxu en kəsikdə çubuğun qalınlığı istiqamətində və  $y$  oxu çubuğun neytral təbəqəsində yerləşsin (şəkil 1).



Şək. 1.

Çubuqda yaranan qeyri-xətti deformasiyanı ( $\varepsilon^v$ -ni) [3]-ə əsasən aşağıdakı şəkildə götürürük:

$$\varepsilon^V = \frac{\sigma}{E_{k+1}} \left\{ 1 + \left( \frac{\sigma}{\sigma_{k+1}^0} \right)^n \right\}, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (1)$$

Burada  $\varepsilon^V$  qeyri-xətti deformasiya,  $\sigma$  paketdə xarici qüvvənin təsiri nəticəsində yaranan gərginlik və  $\sigma_{k+1}^0$  gərginliyin materialda sürüncəkliyin yaranacağı anına uyğun qiymətidir. Həmçinin  $n$  materialların qeyri-xətti rəftarını müəyyən edən sabit qiymətlərdir.

Əgər (1)-də verilən ifadəni zamana görə diferensiallasaq, alırıq:

$$\dot{\varepsilon}^V = \frac{\dot{\sigma}}{E_{k+1}} \left\{ 1 + (n+1) \left( \frac{\sigma}{\sigma_{k+1}^0} \right)^n \right\} \quad (2)$$

Həmçinin sürüncəkliyin sürətini gərginliyin qüvvət funksiyası şəklində aşağıdakı kimi götürürük [1]:

$$\dot{p} = A_{k+1} \sigma^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Burada  $A, m$  materialın eksperiment müşahidəsi nəticəsində xassəni müəyyən edən sabit parametrlərdir.

Əgər çubuğun deformasiyasını Bernulli-Eyler düsturuna uyğun olduğunu fərz etsək, onda yaza bilərik:

$$\varepsilon = U_{,x} + \frac{1}{2} W_{,x}^2 + z W_{,xx} \quad (4)$$

$U, W$  - çubuğun neytral təbəqəsinə uyğun olaraq  $x$  və  $z$  oxları istiqamətindəki yerdəyişmələridir.  $_{,x}$  - uyğun koordinata görə törəmədir.

Əgər (4)-də verilmiş ifadəni zamana görə diferensiallasaq alırıq:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{U}_{,x} + W_{,x} \dot{W}_{,x} + z \dot{W}_{,xx} \quad (5)$$

Qarıxıq variasiya prinsipi əsasında paketin birgə deformasiyasının əsasında funksionalı ( $I = \sum_m I_m$ ) qəbul edək (burada  $I_m$  hər bir layın aralarındakı səthi nəzərə almadan funksionalıdır) və (2), (3), (5)-də verilən ifadələrdən istifadə etməklə və paketin deformasiyasının zamana görə törəməsini [1]-ə əsasən:  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^V + \dot{p}$  qəbul edək, onun funksionalını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$I = \int_0^l \int_{-h}^h \left( \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} \sigma \dot{W}_{,x}^2 \right) dx dz - \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}} \left\{ 1 + (n+1) \left( \frac{\sigma}{\sigma_{k+1}^0} \right)^n \right\} dx dz - \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \dot{\sigma} \dot{p} dx dz \quad (6)$$

burada paketin həndəsəsinə əsasən inteqralların aşağı və yuxarı sərhədlərində qeyd olunmuş  $a_k, a_{k+1}$  aşağıdakı ifadələrlə təyin olunur:

$$a_k = -h + \sum_{j=0}^k \delta_j, \quad a_{k+1} = -h + \sum_{j=0}^{k+1} \delta_j = a_k + \delta_{k+1}$$

Çubuğun əyintisi  $W$  və xarici qüvvənin təsirindən yaranan əyici momentin  $M$  ifadələrini şəkil 1-dəki bağlama şərtlərinə əsasən aşağıdakı ifadələrlə qəbul edirik:

$$W = a(t) \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right), \quad (7)$$

$$M = b(t) \cos \frac{\pi x}{l} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad (8)$$

Uclardan oynaqla bağlanan bircinsli prizmatik çubuqlar üçün qabarma məsələsi [2]-də həll edilmişdir və paketin qabarmasını onunla müqayisə edirik.

Sabit sıxıcı qüvvə təsirindən çubuğun en kəsiyinin ixtiyari nöqtəsində yaranan gərginliyi  $z$  koordinatında (qalınlıqda) xətti asılı olduğu fərziyyəsi daxilində qəbul etməklə yazıla bilər:

$$\sigma = \frac{-T}{2h} + \frac{3M}{2h^3} \cdot z \quad (T = const) \quad (9)$$

və əgər onu zamana görə diferensiallasaq alarıq:

$$\dot{\sigma} = \frac{3\dot{M}z}{2h^3} \quad (10)$$

Əgər (6)-dakı funksionalına (10)-da verilmiş ifadəsini daxil etsək və funksionalın inteqralının altındakı alınan ifadəsini  $z$ -ə görə inteqrallasaq, aşağıdakı əvəzləmələrdən istifadə etməklə:

$$\varphi_2 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1} a_k} \int z^2 dz, \quad \varphi_{i+2}^v = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1} (\delta_{k+1}^0)^n} \int z^{i+2} dz, \quad \varphi_{j+1}^c = \sum_{k=0}^{s-1} A_{k+1} \int z^{j+1} dz \quad (11)$$

$$\text{və} \quad \left( c_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}, \quad (a+bz)^p = \sum_{i=0}^p c_p^i a^{p-i} b^i z^i \right)$$

yaza bilərik:

$$\begin{aligned} I = & \int_0^l \dot{M} \dot{W}_{,xx} dx + \left( \frac{-T}{2} \right) \int_0^l \dot{W}_{,x}^2 dx - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2h^3} \right)^2 \varphi_2 \int_0^l \dot{M}^2 dx - \\ & - \frac{n+1}{2} \sum_{i=0}^n c_n^i \left( \frac{-T}{2h} \right)^{n-i} \left( \frac{3}{2h^3} \right)^{i+2} \varphi_{i+2}^v \int_0^l \dot{M}^2 M^i dx - \\ & - \sum_{j=0}^m c_m^j \left( \frac{-T}{2h} \right)^{m-j} \left( \frac{3}{2h^3} \right)^{j+1} \varphi_{j+1}^c \int_0^l \dot{M} M^j dx - \end{aligned} \quad (12)$$

$W, M$  və onların  $x$ -ə və  $t$ -ə görə diferensiallarını, (12)-dəki ifadədə daxil etsək, sonra inteqralların aşağı və yuxarı sərhədləri olaraq 0 və 1-i müəyyənləşdirsək, aşağıdakı əvəzləmələri işarə verməklə

$$c_1 = \int_0^l \dot{M} \dot{W}_{,xx} dx, \quad c_2 = \int_0^l \dot{W}_{,x}^2 dx, \quad c_3 = \int_0^l \dot{M}^2 dx, \quad c_{i+2} = \int_0^l \dot{M}^2 M^i dx, \quad c_{j+1} = \int_0^l \dot{M} M^j dx \quad (13)$$

(12)-də verilən funksionalı aşağıdakı ifadə ilə verə bilərik:

$$\begin{aligned}
I = & \frac{-\pi^2 \dot{a} \dot{b}}{l} c_1 + \left( \frac{-T}{2} \right) \frac{\pi \dot{a}^2}{l} c_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2h^3} \right)^2 \varphi_2 \dot{b}^2 l c_3 - \\
& - (b^2 l) \frac{n+1}{2} \sum_{i=0}^n C_n^i C_{i+2} \left( \frac{-T}{2h} \right)^{n-i} \left( \frac{3}{2h^3} \right)^{i+2} b^i \varphi_{i+2}^v - \\
& - (b l) \sum_{j=0}^m C_m^j C_{j+1} \left( \frac{-T}{2h} \right)^{m-j} \left( \frac{3}{2h^3} \right)^{j+1} b^j \varphi_{j+1}^c
\end{aligned} \quad (14)$$

Bu mərhələdə funksionalın ekstremumluq şərtinə əsasən,  $\frac{\partial I}{\partial \dot{a}} = 0$  və

$\frac{\partial I}{\partial \dot{b}} = 0$  tənliklərindən başlanğıc şərtlər daxilində, yəni  $b(0) = a(0) = 0$  olmaqla iki

diferensial sistem tənlik alırıq. Birinci tənlikdən

$$\frac{-\pi^2 \dot{b} c_1}{l} - \frac{\pi^2 T \dot{a} c_2}{l} = 0 \quad \text{və buradan} \quad \dot{b} = \frac{-c_2}{c_1} T \dot{a}, \quad (15)$$

(15) bərabərliyini sistemin ikinci tənliyində nəzərə almaqla yaza bilərik:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{-\pi^2 c_1}{l} + \frac{c_2 c_3}{c_1} \left( \frac{3}{2h^3} \right)^2 T \varphi_2 l + \right. \\
& \left. + (n+1) l \sum_{i=0}^n (-1)^i c_n^i c_{i+2} T^{i+1} \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^{i+1} \left( \frac{-T}{2h} \right)^{n-i} \left( \frac{3}{2h^3} \right)^{i+2} \varphi_{i+2}^v a^i \right] \cdot \dot{a} - \\
& - l \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j C_{j+1} T^j \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^j \left( \frac{-T}{2h} \right)^{m-j} \left( \frac{3}{2h^3} \right)^{j+1} a^j \varphi_{j+1}^c = 0
\end{aligned} \quad (16)$$

Həmçinin aşağıdakı ölçüsüz kəmiyyətləri seçərək:

$$\begin{aligned}
& (a = h\eta, \dot{a} = h\dot{\eta}), \left( \frac{T}{E_1 h} = \omega, \frac{T}{h} = E_1 \omega \right), \\
& \left( T = A_1 E_1^m t, \frac{d}{dT} = \frac{1}{A_1 E_1^m} \cdot \frac{d}{dt} \right), \quad (h/l = \xi)
\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
\frac{9c_2 c_3 E_1 \varphi_2}{4c_1 h^3} = \Phi_2, \quad \frac{(-1)^n 3^{i+3} \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^{i+1} C_n^i C_{i+2} E_1^{n+1} \varphi_{i+2}^v}{2^{n+2} h^{i+3}} = \Phi_{i+2}^v \\
\frac{(-1)^m 3^{j+1} \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^j C_m^j C_{j+1} \varphi_{j+1}^c}{2^{m+1} h^{j+2} A_1} = \Phi_{j+1}^c
\end{aligned}$$

və bunları (16) tənliyində nəzərə alsaq, aşağıdakı ölçüsüz kəmiyyətlərdən

ibarət olan diferensial tənliyi alarıq:

$$\frac{dT}{d\eta} = \frac{-\pi^2 c_1 \xi^2 + \omega \Phi_2 + (n+1)\omega^{n+1} \sum_{i=0}^n \Phi_{i+2}^v \eta^i}{\omega^m \sum_{j=0}^m \Phi_{j+1}^c \eta^j} \quad (18)$$

Kritik qüvvəni ( $\omega_{kr}$ ),  $dT/d\eta = 0$  şərtindən təyin edirik və çubuğa təsir edən qüvvənin qiymətini kritik qüvvədən kiçik seçirik ( $\omega < \omega_{kr}$ ).  $\alpha, \beta, \gamma$  və  $\mu$  ilə aşağıdakı ölçüsüz kəmiyyətləri işarə edək

$$\alpha = E_1 E_2^{-1}, \beta = \delta_2 \delta_1^{-1}, \gamma = \sigma_1^0 (\sigma_2^0)^{-1}, \mu = A_1 A_4^{-1}, \lambda = E_1 (\sigma_1^0)^{-1}, \xi = h/l \quad (19)$$

hər bir  $\alpha, \beta, \gamma, \mu$  ölçüsüz kəmiyyətlərdən asılı olaraq yerdəyişmənin və momentin amplitudlarını  $n=2, m=5, s=3, s_1=s_3$ , ( $E_1 = E_3, A_1 = A_3, \delta_1 = \delta_3, \sigma_1^0 = \sigma_3^0$ ) şərti daxilində hesablayırıq və ədədi nəticələri aşağıdakı cədvəllərdə təqdim edirik. (bu misalda  $\eta_0=0.1$  və  $\omega_{kr}=7.30 \times 10^{-5}$  və  $\omega=3.11 \times 10^{-5}$ ,  $\lambda=300$ ,  $\xi=0.05$ )

Cədvəl 1

$$\gamma = 0.25, \beta = 4$$

$\alpha$	0,25	1,25	2,25	3,25
$\eta^v$	0,121	0,124	0,127	0,129

Cədvəl 2

$$\alpha = 0.25, \beta = 4$$

$\gamma$	0,25	1,25	2,25	3,25
$\eta^v$	0,121	0,129	0,143	0,151

Cədvəl 3

$$\alpha = \gamma = 0.25$$

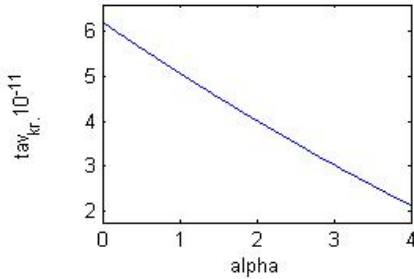
$\beta$	0,5	1,5	2,5	3,5
$\eta^v$	0,150	0,134	0,123	0,116

Əgər  $\alpha = \beta = \gamma = \mu = 1$  olarsa, paket bircinsli çubuq olar. Birinci, elastiki həlli nəzərə almaqla  $\eta$ -lar və  $\eta_{kr}$  hesablanır və sonra  $\omega$ -lar və  $\omega_{kr}$  və nəhayətdə  $\tau_{kr}$  aşağıdakı ifadə ilə təyin olur.

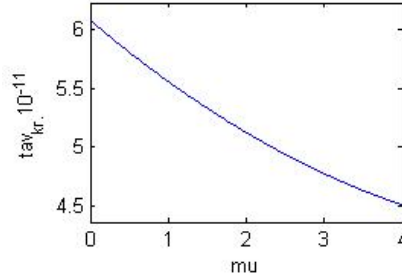
$$\alpha = \beta = \gamma = 1 \quad \text{olduqda:} \quad \begin{cases} \eta_{kr} = 0,211 \\ \omega_{kr} = 6,5 \times 10^{-5} \end{cases}$$

$$\alpha = \beta = \gamma = \mu = 1 \text{ olduqda: } \begin{cases} \omega = 3,11 \times 10^{-5} \\ \eta = 0,131 \end{cases} \text{ və buradan } \tau_{kr} = 3,62 \times 10^{10}$$

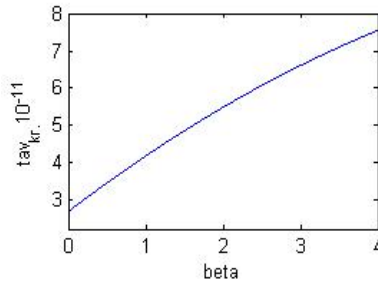
Birinci, şəkil 2-də verilmiş qrafikdə əgər  $\alpha$  ( $E_1/E_2$ ) artdıqca, yəni  $E_2$  azaldıqca paketin ikinci layı zəifləyir. Birinci,  $\alpha$ -nın böyük qiymətlərində, yəni  $E_2$ -nin  $E_1$ -ə nisbətən böyük olduğu hallarda ( $E_1 = const, \alpha = E_1/E_2$ )  $\tau_{kr}$ -in qiyməti azalır, bu isə paketin yük götürmə qabiliyyətinin azalmasına səbəb olur.



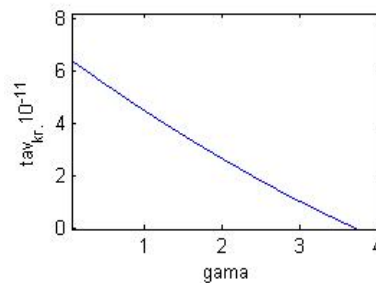
Şəkil 2.



Şəkil 3.



Şəkil 4.



Şəkil 5.

Analoji olaraq, şəkil 3-də verilən qrafikdən aydın olur ki,  $\mu = A_1/A_2$  böyüdükcə ( $A_1 = const$  şərti daxilində)  $A_2$  azalır, nəticədə paketin yük götürmə qabiliyyətini təyin edən zaman müddəti ( $\tau_{kr}$ ) azalır və orta lay daha tez sıradan çıxır.

Dördüncü şəkildəki qrafikdən məlumdur ki, paketin qalınlığı yəni,  $\beta$  böyüdükcə paketin yük götürmə qabiliyyəti artır.

Bəşinci şəkildəki qrafikdən  $\gamma$ -nın artması ilə həddi vəziyyəti daha tez əmələ gəlir.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. М.: Наука, 1966, 752 с.
2. Севдимальев Ю.М. Выпучивание стержня при ползучести, изготовленного из нелинейно-упругого материала, Деп. ВИНТИ, 1981, № 4517, 81 Деп.
3. Ишлинский А.Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю.Ишлинский, Д.Д.Ивлев. М.: Физматлит, 2003, 704 с

4. Амензаде Р.Ю. Предельное состояние жестко зашеченного нелинейно-упругого многослойного стержня / Р. Ю. Амензаде, Э. Т. Киясбейли, Л. Ф. Фатуллаева // Журн. МКМ. 2006, т. 42, № 3, с. 347–360.

**ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО КОМБИНИРОВАННО ЗАКРЕПЛЕННОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ**

**Ю.Н.БАВАФА**

**РЕЗЮМЕ**

Исследована потеря несущей способности при ползучести комбинированно закрепленного по торцам нелинейно-упругого многослойного стержня с разными по толщине слоями из различных материалов. Принято, что слои стержня жестко сцеплены между собой. Поставленная задача решается модифицированным для гетерогенных сред вариационным методом смешанного типа в сочетании с методом Релея-Ритца. Исходный анализ сводится к решению задачи Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной. За начальное условие принимается значение прогиба, соответствующее решению нелинейно-упругой задачи. Для трехслойного стержня численно выявлено влияние физико-механических параметров на критическое время выпучивания.

**Ключевые слова:** многослойный стержень, ползучесть, пакет, критическая сила, жесткое защемление, критическое время, нелинейность, вариация

**THE VARIATIONAL METHOD FOR THE SOLUTION OF A PROBLEM OF A LIMITING STATE OF A MULTILAYER WITH FORWARD PIN AND FIX END OF NONLINEARLY ELASTIC ROD AT CREEP**

**Y.N.BAVAFA**

**SUMMARY**

The loss of the load-carrying capacity of a nonlinearly elastic multilayer rod at creep is investigated. The layers of rod have various thickness and are made of different materials, the forward is pinned and the others are fixed. Rigid contact conditions between the layers are assumed. The problem posed is solved by using the variational method of mixed type in combination with the Rayleigh-Ritz method. The initial analysis is reduced to the solution of the Cauchy problem for a nonlinear ordinary differential equation solved for the first derivative. As the initial condition, the value corresponding to the decision of a nonlinear-elastic problem is assumed. The influence of physic mechanical parameters on the critical time of the buckling is numerically revealed for a three-layer rod.

**Keywords:** multilayer rod, creep, pocket, critical force, hard restrained, critical time, non-linear, variation.

*Redaksiyaya daxil oldu: 13.06.2011-ci il.*

*Çapa imzalandı: 03.10.2011-ci il.*